

1 Grundlagen aus Mechanik I

1.1 Statikaufgaben

1.1.1 Vorgehen bei Statikaufgaben

1. Identifiziere alle unterschiedlichen Starrkörper, deren Starrkörperverbindungen und die Lager
2. Koordinatensystem einführen und Freischnittsskizze erstellen:
 - (a) Lager gemäss der Tabelle ersetzen
 - (b) Systeme, die gelenkig miteinander verbunden sind, trennen und Kontaktkräfte an beiden Starrkörpern eintragen (entgegengerichtet, sodass die Kräfte sich beim zusammenfügen wieder aufheben)
 - (c) Seile mit Seilkräfte ersetzen
 - (d) Alle äusseren Kräfte eintragen. Falls diese an einer Schnittstelle wirken, werden diese nur einmal berücksichtigt! Verteilte Kräfte werden auf ihre Resultierende und dessen Kraftangriffspunkt gemäss Tabelle reduziert.
 - (e) Falls in der Aufgabenstellung nicht „masselos“ erwähnt wird, zusätzlich noch die Gewichtskräfte im Schwerpunkt der Starrkörper eintragen.
3. Gleichgewichtsbedingungen formulieren und nach gesuchten Kräften/Momenten auflösen:

$$R_x = R_y = R_z = 0 \quad \& \quad M_x = M_y = M_z = 0 \quad (1)$$

4. Gleichungen nach gesuchten Grössen auflösen

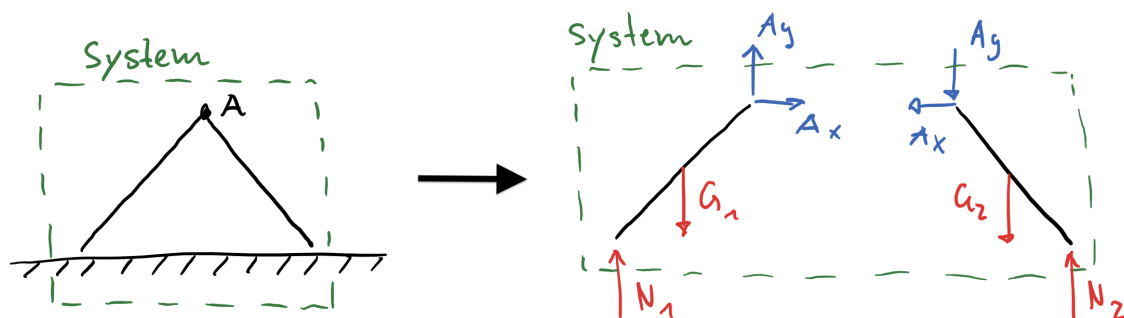


Abbildung 1: Beispiel einer Freischnittsskizze

1.1.2 Lagerkräfte und -momente

Beim Freischneiden werden Lager durch Lagerkräfte und -momente ersetzt.

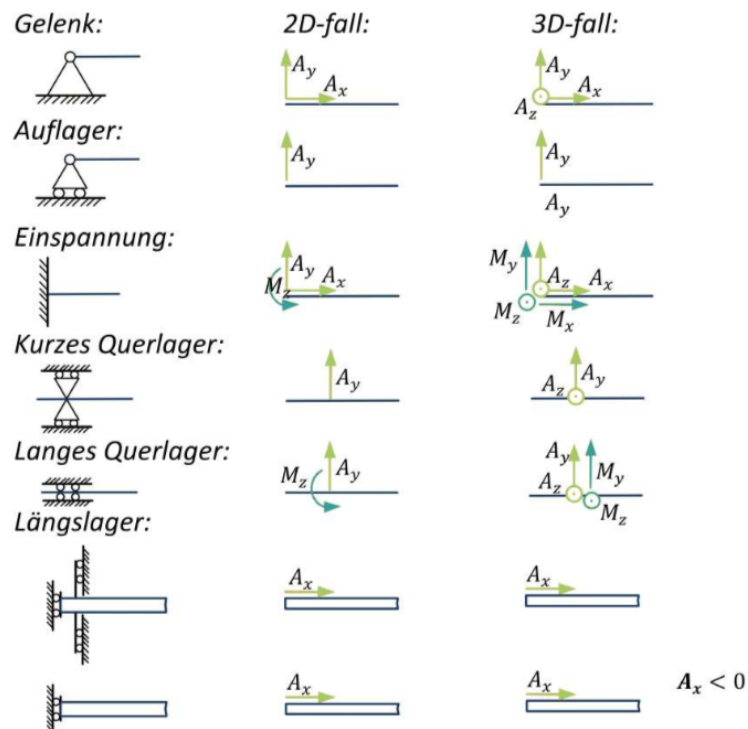


Abbildung 2: Lagerreaktionen

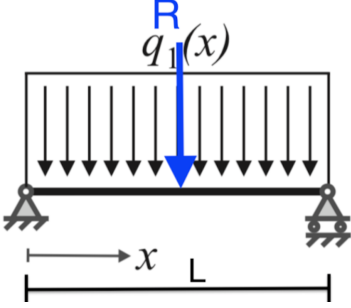
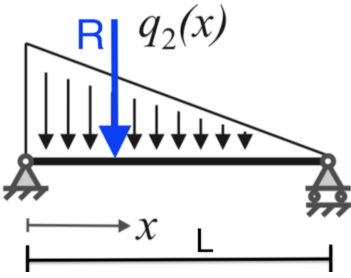
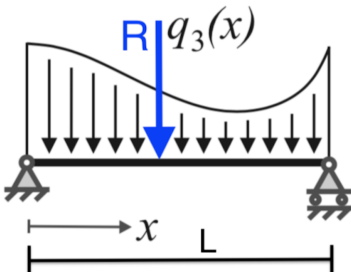
Beachte:

Ein Lager verursacht Kräfte genau in die Richtungen, in die es Bewegung verhindert.

Ein Lager verursacht Momente genau um die Achsen, um die es Rotation verhindert.

1.1.3 Linienverteilte Kräfte

Linienverteilte Kräfte sind Kräfte, die über einen Balken verteilt sind. Die Einheit der linienverteilten Kraft q ist Kraft pro Länge. Um einfacher mit linienverteilten Kräften rechnen zu können, werden diese anhand folgender Formeln reduziert:

Gleichförmige Verteilung	Dreiecksverteilung	Allgemeine Verteilung
		
$q(x) = q_0$	$q(x) = \frac{x}{L} \cdot q_0$	$q(x) = q(x)$
$R = L \cdot q_0$	$R = \frac{L}{2} \cdot q_0$	$R = \int_0^L q(x) dx$
$x_s = \frac{L}{2}$	$x_s = \frac{L}{3}$	$x_s = \frac{1}{R} \cdot \int_0^L x \cdot q(x) dx$

1.2 Beanspruchung

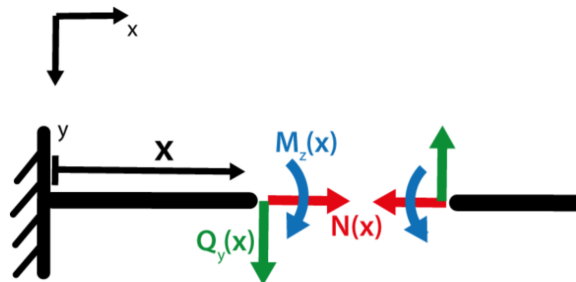
Die Beanspruchung bezeichnet die Kräfte und Momente, die auf einen Körper an einer bestimmten Stelle wirken. Sie kann innerhalb eines Stabes variieren und ist daher abhängig von einer Laufvariable. Die Beanspruchung besteht aus mehreren Komponenten, d.h. ein Punkt in einem Stab kann auf folgende verschiedene Arten belastet werden.

1.2.1 2D - 3 Komponenten

Normalkraft $\underline{N}(x)$

Querkraft $\underline{Q}_y(x)$

Biegemoment $\underline{M}_z(x)$



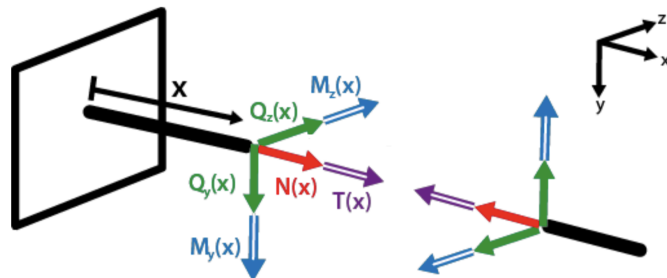
1.2.2 3D - 6 Komponenten

Normalkraft $\underline{N}(x)$

Querkräfte $\underline{Q}_y(x)$ und $\underline{Q}_z(x)$

Biegemomente $\underline{M}_y(x)$ und $\underline{M}_z(x)$

Torsion $\underline{T}(x)$



Wichtig: Einführen der Beanspruchungskomponenten:

Am Schnittufer als erstes Normalkraft entlang Stabrichtung einzeichnen. Dann Normalkraft mit dem gegebenen Koordinatensystem vergleichen. Zeigt sie in:

- positive Achsenrichtung → Kräfte und Momente in positive Achsenrichtung einführen
- negative Achsenrichtung → Kräfte und Momente in negative Achsenrichtung einführen

Dadurch wird sicher gestellt, dass:

- $N > 0$ bedeutet, der Stab wird auf Zug belastet
- $N < 0$ bedeutet, der Stab wird auf Druck belastet

1.2.3 Vorgehen

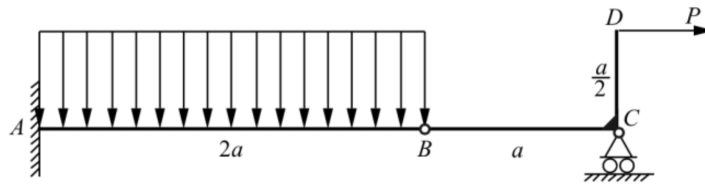


Abbildung 3: Gesamtsystem

1. Alle Einzelkörper freischneiden und Lagerkräfte bestimmen
2. Stäbe in Abschnitte unterteilen:
 - vor/nach Einzelkräften
 - vor/innerhalb/nach linienverteilten Kräften

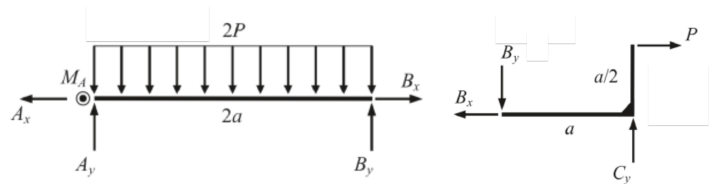


Abbildung 4: Systemtrennung

Folgende Schritte für jeden Abschnitt:

3. Für jeden Stab Laufvariable einführen und Bereich für jeweiligen Abschnitt definieren
4. Stab in jedem Abschnitt schneiden und Beanspruchungskomponenten am Schnitt einführen (Konvention!)
5. Linienverteilte Kräfte in Abhängigkeit von Laufvariable reduzieren $\rightarrow R(x)$
6. GGW an jedem Teilsystem $\rightarrow$ Löse nach Beanspruchungskomponenten auf

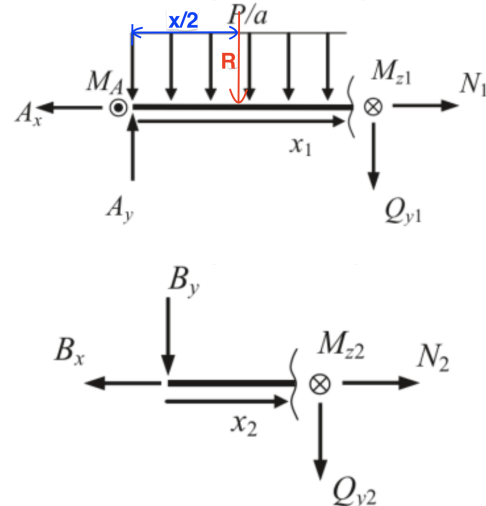


Abbildung 5: Schritte 3 bis 5

1.2.4 Differentialbeziehungen

Stellen den Zusammenhang zwischen linienverteilten Kraft, Querkraft und Biegemoment da:

$$Q_y'(x) = -q_y \quad \rightarrow \quad Q_y(x) = - \int q_y dx \quad (2)$$

$$M_z'(x) = -Q_y(x) \quad \rightarrow \quad M_z(x) = - \int Q_y(x) dx \quad (3)$$

$$Q_z'(x) = -q_z \quad \rightarrow \quad Q_z(x) = - \int q_z dx \quad (4)$$

$$M_y'(x) = Q_z(x) \quad \rightarrow \quad M_y(x) = \int Q_z(x) dx \quad (5)$$

Beachte: Beim Integrieren Integrationskonstanten $C_{1,2}$ nicht vergessen!
Bestimmen der Konstante durch Einsetzen von Randbedingungen:

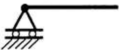
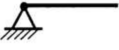
Lagerart	Symbol	Q	M	N
-Auflager		$Q \neq 0$	$M = 0$	$N = 0$
-Festlager		$Q \neq 0$	$M \neq 0$	$N \neq 0$
-Einspannung		$Q \neq 0$	$M \neq 0$	$N \neq 0$
-Freies Ende		$Q = 0$	$M = 0$	$N = 0$
-Gelenk		$Q \neq 0$	$M = 0$	$N \neq 0$

Abbildung 6: Randbedingungen für Differentialbeziehungen

Beachte:

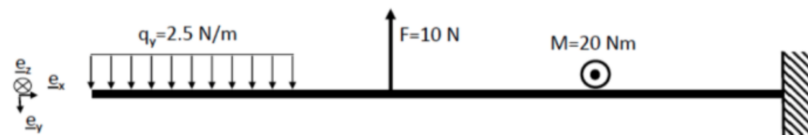
- $Q = \text{pos. Lagerkraft}$, wenn Laufvariable weg vom Lager führt
- $Q = \text{neg. Lagerkraft}$, wenn Laufvariable zum Lager führt
- $M_z > 0$, wenn Oberseite auf Zug belastet wird
- $M_z < 0$, wenn Oberseite auf Druck belastet wird

1.2.5 Beanspruchungsdiagramme

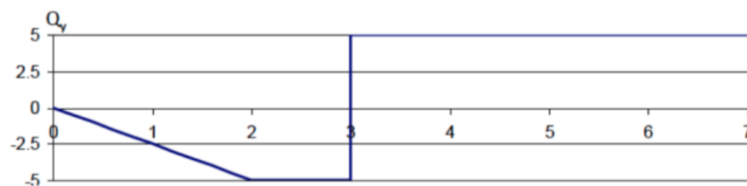
Graphische Darstellung von $Q_y(x)$ und $M_z(x)$. Da obiger Zusammenhang gilt, haben die verschiedenen Belastungen Einfluss auf die jeweiligen Diagramme.

Belastungsart	Querkraft	Biegemoment
Einzelkraft	Sprung	Knick
Einzelmoment	konst.	Sprung
Keine Kraft	konst.	Gerade
linienverteilte Kraft	Gerade	Quadratisch
dreiecksverteilte Kraft	Quadratisch	Kubisch

Lastfall



Querkraft



Biegemoment

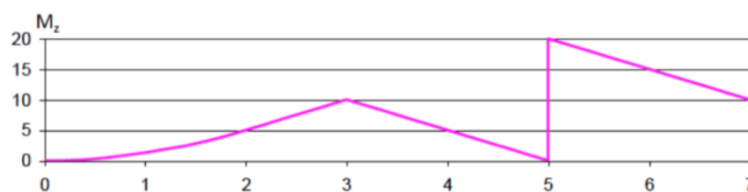


Abbildung 7: Beanspruchungsdiagramme

1.3 Reibung

Körper sind in der Realität nicht reibungsfrei, sondern es treten Reibungskräfte oder Reibungsmomente auf. Die Reibungskraft wirkt entgegen der Bewegungsrichtung und immer senkrecht zur Normalkraft. Die Reibungsmomente wirken immer entgegen der Rotationsrichtung und senkrecht zur Ebene.

1.3.1 Haftreibung

Haftreibung ist die Bedingung, dass der Körper am Boden (oder an einem anderen Körper) haftet. Solange die Ungleichheit stimmt, bewegt sich der Körper relativ zum Boden (oder zum anderen Körper) nicht.

μ_0 ist der Haftreibungskoeffizient. Haften liefert eine zusätzliche Bedingung.

$$|\underline{F}_R| < \mu_0 \cdot |\underline{N}| \quad (6)$$

1.3.2 Gleitreibung

Bewegt sich der Körper relativ zum Boden (oder einem anderen Körper), dann gleitet er und erfährt eine konstante Reibungskraft.

μ_1 ist der Gleitreibungskoeffizient. Gleiten liefert eine zusätzliche Gleichung.

$$|\underline{F}_R| = \mu_1 \cdot |\underline{N}| \quad (7)$$